

## 1 線形代数・ベクトル解析

### 1. 直交について

- 任意のベクトルを3つの単位ベクトルの線形結合として表しなさい。
- そのように表せるために、それらの単位ベクトルはどのような条件が必要か。
- 任意のベクトルを  $n$  個の単位ベクトルの線形結合として表しなさい。
- その類推として、ある関数を関数の集合を用いて表しなさい。
- その関数の集合が直交関数系であるとはどういうことか。
- その直交関数系が「正規」であるとはどういうことか。
- その正規直交関数系が「完全」であるとはどういうことか。

### 2. 勾配、発散、回転

- あるスカラー量  $\phi$  があるとき、その3次元空間における勾配を示しなさい。
- 3次元空間であるベクトル場があるとき、その発散はどのように表されるか。
- 3次元空間であるベクトル場があるとき、その回転はどのように表されるか。

### 3. 線形従属、線形独立

- 2つのベクトルがあるとき、それらが線形従属であるとはどういうことかを説明しなさい。
- 2つのベクトルがあるとき、それらが線形独立であるとはどういうことかを説明しなさい。

### 4. 行列式、逆行列

- 3行3列の行列の、行列式を展開式で示しなさい。

- 2 次の正方行列、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

に逆行列が存在するための条件はなにか。またその逆行列を求めなさい。

5. あるベクトル場についてのガウスの発散定理がどのようなものか述べなさい。またそのベクトル場が速度場であったとき、その物理的意味を述べなさい。
6. あるベクトル場についてのストークス定理がどのようなものか述べなさい。またそのベクトル場が速度場であったとき、その物理的意味を述べなさい。
7. ある関数が線形であるとはどういうことか。
8. 行列  $A$  があるとき、その固有値とは何か。
9. 次の行列  $A$  について以下のことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2)$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおくと、 $A = aE + bI$  と書ける。
- $I^2 = -E$

10.  $n$  次の行列  $A$  が正則であるとはどういうことか。
11. 2つのベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  について、 $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$  ならば  $a = b = 0$  が成り立つとき、これらのベクトルは1次独立であることを示しなさい。
12. 連立同時1次方程式が、自明でない解を持つためには、その係数行列に必要な条件はどのようなものか。

13. 行列  $A$  がすべて異なる固有値をもつとき、それに対応する固有ベクトルを用いて行列  $A$  を対角化しなさい。
14. 直交関数系とは何か、またそれが完全であるとはどういうことか。
15. 2つの実関数の内積を定義して、それらが直交するとはどういうことかを示しなさい。

## 2 解析学 (微分積分学)

1. 連続でなめらかな関数の導関数を定義しなさい。
2. 独立変数を 2 つ持つ関数について、偏導関数を定義しなさい。
3. 独立変数を 2 つ持つ関数について、全微分を定義しなさい。
4.  $x \ll 1$  のとき、
  - $\sqrt{1+x}$  の近似式を求めなさい。
  - $e^x$  の近似式を求めなさい。
5. 初項  $a$ 、公比  $r$  の無限等比級数について、その第  $n$  部分和を求めなさい。またその収束の条件を述べなさい。さらに収束する場合、その極限值はどう表されるか。
6. 双曲関数の  $\sinh x, \cosh x$  を微分しなさい。
7. 指数関数  $e^x$  をテイラー級数に展開しなさい。
8.  $xe^x$  の原始関数を求めなさい。
9. 連続でなめらかな関数  $f(x)$  の点  $x = a$  における接線の方程式を示しなさい。
10. 連続でなめらかな関数  $f(x)$  の点  $x = a$  における法線の方程式を示しなさい。
11. 次の不定積分を求めなさい。  $\int x \sin x dx$

解：部分積分の問題である。

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \quad (3)$$

$$= -x \cos x + \sin x + C \quad (4)$$

12. 次の不定積分を求めなさい。  $\int \log x dx$

解：部分積分の問題である。

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \quad (5)$$

$$= x \log x - x + C \quad (6)$$

13. 関数  $\cos x$  をテイラー級数に展開しなさい。

14. テイラー級数を示し、その第1項まで取ったものが、1次の導関数を近似していることを示しなさい。

### 3 微分方程式

1. 一般に一階の常微分方程式  $\frac{dy}{dx} = P(x)Q(x)$  はどのようにして解けるか。

2. 次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 2xy^2 \quad (7)$$

3. 次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0 \quad (8)$$

4. 地球からの脱出速度が、 $v \frac{dv}{dr} = -g \frac{R^2}{r^2}$  で表されているとき、 $r = R$  で、 $v = v_0$  となる解を求めなさい。

5.  $a, b$  は定数として、

$$\frac{dv}{dt} + av = b \quad (9)$$

を解きなさい。

6. 微分方程式、

$$\frac{dx}{dt} = -i\omega x \quad (10)$$

の解を求め、これが振動を表すことを示しなさい。

7. 次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial y}{\partial x} + \omega^2 y = 0 \quad (11)$$

## 4 力学

### 1. 単振動

- 質量  $m$  の質点が、ばね定数  $k$  のばねで、固定点につながっているとき、その質点の運動方程式を微分方程式で表しなさい。
- 仮想的に  $k < 0$  であるとき、その運動方程式を解いて、その物理的意味を述べなさい。
- $k > 0$  で、速度に比例した摩擦力が働く時、運動方程式はどのように表されるか。
- 固定点が、 $A \sin \omega_0 t$  で振動する時はどうなるか。またそのような微分方程式の一般的解き方を述べなさい。

2. 応力とは何か。

3. 浮力とは何か。

4.  $xy$  平面上を運動する点  $P$  が、曲線  $x = f(t), y = g(t)$  上を運動するとき、速度ベクトル、速度の方向、速度の大きさ、および加速度ベクトルはどのように表されるか。

5. 質点についての鉛直方向の運動方程式が、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g \quad (12)$$

であるとき、これを積分してその速度と位置の式を示しなさい。ただし初期条件は適当に与えなさい。

6.  $xy$  平面上を運動する点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $(x, y)$  が、

$$x = r \cos \omega t \quad (13)$$

$$y = r \sin \omega t \quad (14)$$

$$(15)$$

で与えられる。ただし、 $r > 0, \omega > 0$  の定数。この場合、速度の方向と加速度の方向が直交することを示しなさい。またこればどのような運動か。

7. 水平面上を水平に振動する質点の運動方程式を示し、その一般解を求めなさい。
8. 振動運動における共振あるいは共鳴とはどのような現象か。
9. 粒子の数  $N$  が時間とともに減少していく現象を考える。その減少の割合が、各時刻  $t$  における粒子数  $N$  に比例するとき、その減少の微分方程式はどのように表されるか。また適当な初期条件を与えてそれを解きなさい。



## 5 熱力学

1. 熱力学において、熱と温度の違いを述べなさい。
2. 熱力学におけるジュールの法則を説明しなさい。
3. 熱力学におけるボイルの法則を説明しなさい。
4. 熱力学におけるシャルルの法則を説明しなさい。
5. 理想気体の方程式を書いて、その意味を述べなさい。
6. 熱力学第1法則を説明しなさい。
7. 理想気体の準静的断熱変化において、熱力学第1法則はどのように表されるか。

## 6 流体力学

1. 流体力学における流体とは何か。

解：「静止状態において、接線応力が現れず、かつ法線応力が圧力であるような連続体が流体である。」

2. 完全流体と粘性流体とは何か。またその違いは何か。

解：「運動中でも接線応力が現れない流体を完全流体、運動中に接線応力の現れ得る流体を粘性流体という。」

3. 流体の運動を表すのに Lagrange の方法と Euler の方法があるが、それぞれどのような方法か説明しなさい。

4. 層流と乱流を説明しなさい。

5. 流体の運動を記述するために必要な物理量は何か。

6. 流体の運動を表す方法の一つに「流線」がある。この流線とは何か。

7. 流体の速度場について、循環と渦度を説明しなさい。

8. ある物理量  $A$  について、Lagrange 微分と Euler 微分の関係を示しなさい。ただし、3次元空間で Euler の方法で、 $A$  は  $x, y, z, t$  の関数として与えられているものとする。

9. 連続の式を導きなさい。

10. レイノルズ数とはどういう数か。またレイノルズの相似則とはどのようなものか。

解：

$$R = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (16)$$

ここで  $\mu$  は粘性率。

11. 速度場が  $u, v, w$  で与えられているとき、渦度と発散を示しなさい。

## 7 気象学

1. 地球大気の特徴として、大気が成層していることがあげられる。これによって起こる地球大気独特の大気現象をあげ、その特徴を述べなさい。
2. 地球大気の特徴として、回転する地球上にあることがあげられる。これによって起こる地球大気独特の大気現象をあげ、その特徴を述べなさい。
3. 日本付近で発生する降水をもたらす主要な気象擾乱を4つあげ、その特徴を述べなさい。
4. 地球大気は放射平衡にあるので、平均温度は一定であるといえます。これを具体的に説明しなさい。
5. 気象学でいう「温室効果」を説明し、温室が暖かいこととどこが異なるかを述べなさい。
6. 大気の成層の安定性について尋ねます。
  - 乾燥大気の場合、成層の安定性を説明しなさい。
  - 湿潤大気の場合について、条件付不安定と対流不安定を説明し、その違いを明らかにしなさい。
7. 未飽和であるが水蒸気を含む空気塊を、周囲の大気と混ざり合うことなく断熱的に静かに大気上端まで持ち上げた後、同様に断熱的に地上まで下ろしたとします。その時に空気塊の温度はどのように変化しますか。
8. 地衡風と温度風とは何かを説明しなさい。
9. 温位について尋ねます。
  - 温位とは何かを説明しなさい。
  - 温位にも水蒸気を考慮した仮温位があります。これは水蒸気のどのような物理的特性を考慮したのですか。

- そのほかに水蒸気を考慮した相当温位があります。それを説明し、仮温位とどの点のことなるかを述べなさい。
10. 運動方程式から運動エネルギーの式を導いて、コリオリ力が運動エネルギーを変化させないことを示しなさい。
  11. 乾燥大気について、断熱変化とは何かを説明しなさい。さらにその減率を熱力学第1法則から求めなさい。
  12. 温帯低気圧について尋ねます。
    - 温帯低気圧が熱帯低気圧と決定的に異なる点を述べなさい。
    - 温帯低気圧は日々の天気においてどのような役割を持っていますか。
    - 温帯低気圧は大気の大循環においてどのような役割を持っていますか。