1　線形代数 ・ベクトル解析

1. スカラー、ベクトル、テンソルの意味を述べなさい。
2. テンソルで表される物理量の例をあげなさい。
3. 2 つのベクトルがあるとき、それらのなす角を示しなさい。
4. 2 つのベクトルがあるときそれらのベクトル積はどのようなものか。
5. あるスカラー量 ϕ があるとき、その 3 次元空間における勾配を示しなさい。
6. 3 次元空間であるベクトル場があるとき、その発散はどのように表されるか。
7. 3 次元空間であるベクトル場があるとき、その回転はどのように表されるか。
8. 2 つのベクトルがあるとき、それらが線形従属であるとはどういうことかを説明しなさい。
9. 3 次元のユークリッド空間において、任意のベクトルが、3 つのベクトルの線形結合として表しなさい。また、それが可能であるためにはその 3 つのベクトルの間にどのような関係が成り立っていなければならないかを説明しなさい。
10. 2 行 2 列の行列の、行列式を示しなさい。
11. あるベクトル場についてのガウスの発散定理がどのようなものか述べなさい。またそのベクトル場が速度場であったとき、その物理的意味を述べなさい。

    解 ：

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \tag{1}$$

12. あるベクトル場についてのストークス定理がどのようなものか述べなさい。またそのベクトル場が速度場であったとき、その物理的意味を述べなさい。

    解 ：

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

13. ある関数が線形であるとはどういうことか。
14. 行列 A があるとき、その固有値とは何か。

15. 次の行列 A について以下のことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{3}$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$A = aE + bI$ と書ける。
- $I^2 = -E$

16. n 次の行列 A が正則であるとはどういうことか。

17. 2 つのベクトル $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ について、$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = 0$ ならば $a = b = 0$ が成り立つとき、これらのベクトルは 1 次独立であることを示しなさい。

18. 連立同時 1 次方程式が、自明でない解を持つためには、その係数行列に必要な条件はどのようなものか。

19. 行列 A がすべて異なる固有値をもつとき、それに対応する固有ベクトルを用いて行列 A を対角化しなさい。

20. 直交関数系とは何か、またそれが完全であるとはどういうことか。

21. 2 つの実関数の内積を定義して、それらが直交するとはどういうことかを示しなさい。

2　解析学 (微分積分学)

1. 連続でなめらかな関数の導関数を定義しなさい。
2. 独立変数を 2 つ持つ関数について、偏導関数を定義しなさい。
3. 独立変数を 2 つ持つ関数について、全微分を定義しなさい。
4. $x \ll 1$ のとき、
   - $\sqrt{1+x}$ の近似式を求めなさい。
   - e^x の近似式を求めなさい。
5. 初項 a、公比 r の無限等比級数について、その第 n 部分和を求めなさい。またその収束の条件を述べなさい。さらに収束する場合、その極限値はどう表されるか。
6. 双曲関数の $\sinh x, \conh x$ を微分しなさい。
7. 指数関数 e^x をテイラー級数に展開しなさい。
8. xe^x の原始関数を求めなさい。
9. 連続でなめらかな関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における接線の方程式を示しなさい。
10. 連続でなめらかな関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における法線の方程式を示しなさい。
11. 次の不定積分を求めなさい。$\int x \sin x dx$

    解 ：部分積分の問題である。

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx & (4) \\ &= -x \cos x + \sin x + C & (5) \end{aligned}$$

12. 次の不定積分を求めなさい。$\int \log x dx$

    解 ：部分積分の問題である。

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx & (6) \\ &= x \log x - x + C & (7) \end{aligned}$$

13. 関数 $\cos x$ をテイラー級数に展開しなさい。

14. テイラー級数を示し、その第 1 項まで取ったものが、1 次の導関数を近似していることを示しなさい。

3　微分方程式

1. 一般に一階の常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = P(x)Q(x)$ はどのようにして解けるか。

2. 次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 2xy^2 \tag{8}$$

3. 次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0 \tag{9}$$

4. 地球からの脱出速度が、$v\dfrac{dv}{dr} = -g\dfrac{R^2}{r^2}$ で表されているとき、$r = R$ で、$v = v_0$ となる解を求めなさい。

5. a, b は定数として、

$$\frac{dv}{dt} + av = b \tag{10}$$

を解きなさい。

6. 微分方程式、

$$\frac{dx}{dt} = -i\omega x \tag{11}$$

の解を求め、これが振動を表すことを示しなさい。

7. 次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial y}{\partial x} + \omega^2 y = 0 \tag{12}$$

4　力学

1. 応力とは何か。
2. 浮力とは何か。
3. xy 平面上を運動する点 P が、曲線 $x = f(t), y = g(t)$ 上を運動するとき、速度ベクトル、速度の方向、速度の大きさ、および加速度ベクトルはどのように表されるか。
4. 質点についての鉛直方向の運動方程式が、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g \tag{13}$$

であるとき、これを積分してその速度と位置の式を示しなさい。ただし初期条件は適当に与えなさい。

5. xy 平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が、

$$x = r\cos\omega t \tag{14}$$

$$y = r\sin\omega t \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

で与えられる。ただし、$r > 0, \omega > 0$ の定数。この場合、速度の方向と加速度の方向が直交することを示しなさい。またこればどのような運動か。

6. 水平面上を水平に振動する質点の運動方程式を示し、その一般解を求めなさい。
7. 振動運動における共振あるいは共鳴とはどのような現象か。
8. 粒子の数 N が時間とともに減少していく現象を考える。その減少の割合が、各時刻 t における粒子数 N に比例するとき、その減少の微分方程式はどのように表されるか。また適当な初期条件を与えてそれを解きなさい。

5　熱力学

1. 熱力学において、熱と温度の違いを述べなさい。

2. 熱力学におけるボイルの法則を説明しなさい。

3. 熱力学におけるシャルルの法則を説明しなさい。

4. 理想気体の方程式を書いて、その意味を述べなさい。

5. 熱力学第 1 法則を説明しなさい。

6. 理想気体の準静的断熱変化において、熱力学第 1 法則はどのように表されるか。

解 ：

$$C_v dT + pdv = 0 \tag{17}$$

6　流体力学

1. 流体力学における流体とは何か。
2. 完全流体と粘性流体とは何か。またその違いは何か。
3. 流体の運動を表すのに Lagrange の方法と Euler の方法があるが、それぞれどのような方法か説明しなさい。
4. 層流と乱流を説明しなさい。
5. ある物理量 A について、Lagrange 微分と Euler 微分の関係を示しなさい。ただし、3 次元空間で Euler の方法で、A は x, y, z, t の関数として与えられているものとする。
6. 連続の式を導きなさい。
7. レイノルズ数とはどういう数か。またレイノルズの相似則とはどのようなものか。
8. 速度場が u, v, w で与えられているとき、渦と発散を示しなさい。

7　気象学

1. コリオリ力とは何か。
2. 運動方程式から運動エネルギーの式を導いて、コリオリ力が運動エネルギーを変化させないことを示しなさい。