C(物理学 ・地球物理学)

以下の問題について解答しなさい。

問１　t を独立変数とする実関数 x が微分方程式、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \sigma^2 x = 0 \tag{1}$$

を満たすとき、$\lambda > \sigma, \lambda = \sigma, \lambda < \sigma$ の各場合について第 (1) 式を解いて、解の概略を図示しなさい。ここで、σ は 0 でない実数、λ は正の実定数である。

問２　たとえばフーリエ級数のような直交関数系 $\{\phi_n\}$ があるとき、この関数系について次の問いに答えなさい。

1. この関数系が直交関数系であるとはどういう意味か、ベクトルの直交の類推を用いて説明しなさい。
2. この直交関数系が 『完全」(または 『完備」) であるとはどういう意味かを簡潔に説明しなさい。

問３　つぎの行列 A について、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. 行列 A の固有値を求めなさい。
2. 求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを求めなさい。
3. その固有ベクトルを用いて、行列 A を対角化しなさい。

問４　i を虚数単位 $(i = \sqrt{-1})$ とするとき、

1. 指数関数 $\exp(ax)$ が、収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}$ で定義されることを参考にして、$\exp(ix) = \cos x + i\sin x$ のように表されることを示しなさい。
2. これを用いて、$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ を示しなさい。
3. さらにこれを用いて 3 角関数の倍角公式、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \tag{4}$$

を示しなさい。

問５　つぎの微分方程式の一般解を求めなさい。

$$x\frac{dy}{dx} + y = \sin x \tag{5}$$