

## C(物理学・地球物理学)

以下の問題について解答しなさい。

問1  $t$  を独立変数とする実関数  $x$  が微分方程式、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \sigma^2 x = 0 \quad (1)$$

を満たすとき、 $\lambda > \sigma, \lambda = \sigma, \lambda < \sigma$  の各場合について第 (1) 式を解いて、解の概略を図示しなさい。ここで、 $\sigma$  は 0 でない実数、 $\lambda$  は正の実定数である。

問2 たとえばフーリエ級数のような直交関数系  $\{\phi_n\}$  があるとき、この関数系について次の問いに答えなさい。

1. この関数系が直交関数系であるとはどういう意味か、ベクトルの直交の類推を用いて説明しなさい。
2. この直交関数系が「完全」(または「完備」)であるとはどういう意味かを簡潔に説明しなさい。

問3 つぎの行列  $A$  について、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

1. 行列  $A$  の固有値を求めなさい。
2. 求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを求めなさい。
3. その固有ベクトルを用いて、行列  $A$  を対角化しなさい。

問4  $i$  を虚数単位 ( $i = \sqrt{-1}$ ) とするとき、

1. 指数関数  $\exp(ax)$  が、収束する級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$  で定義されることを参考にして、 $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$  のように表されることを示しなさい。
2. これを用いて、 $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$  を示しなさい。
3. さらにこれを用いて 3 角関数の倍角公式、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (3)$$

$$\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta \quad (4)$$

を示しなさい。

問5 つぎの微分方程式の一般解を求めなさい。

$$x \frac{dy}{dx} + y = \sin x \quad (5)$$